ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

SISTEMI DI EQUAZIONI

Monica Bagagli

PRECORSO DI MATEMATICA GENERALE CLET E CLEI

Che cos'è un sistema di equazioni?

Un insieme di due o più equazioni nelle stesse incognite che si vuole siano soddisfatte **contemporaneamente** si dice **sistema di equazioni.**

Risolvere un sistema significa trovare le soluzioni comuni a tutte le equazioni che lo compongono.

Un sistema si dice:

- **determinato**: se ammette un numero <u>finito</u> di soluzioni
- **indeterminato**: se ammette <u>infinite</u> soluzioni
- **impossibile**: se <u>non</u> ammette soluzioni.

Sistemi lineari di due equazioni in due incognite

Un sistema lineare di due equazioni in due incognite x, y si dice **ridotto in forma normale** se è scritto nella forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

con a o b diversi da 0 e a' o b' diversi da 0.

a, a', b, b' sono i **coefficienti** delle incognite x e y

c, c' sono i **termini noti** delle due equazioni.

Una **soluzione** di un sistema lineare di due equazioni in due incognite è una **coppia ordinata** di numeri reali, che verificano <u>contemporaneamente</u> le equazioni del sistema.

Osservazione:

Un sistema lineare <u>determinato</u> ha una sola soluzione.

Metodo di sostituzione

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - 5y \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} / \\ 2(3 - 5y) - 4y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} / \\ 6 - 10y - 4y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} / \\ -14y = -14 \end{cases} \quad \rightarrow y = 1$$

$$\begin{cases} x = 3 - 5(1) \\ y = 1 \end{cases} \longrightarrow \quad x = -2$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

La coppia $(-2, 1)$ è la soluzione del sistema.

Verifica: $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$

$$\begin{cases} -2 + 5(1) = 3 \\ 2(-2) - 4(1) = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = 3 \\ -8 = -8 \end{cases}$$

Entrambe le equazioni si sono trasformate in uguaglianze vere, perciò resta verificato che la coppia $(-2, 1)$ è la soluzione del sistema.

Metodo di addizione e sottrazione

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 27 \\ 2x + 8y = -14 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} 3x - 4y = 27 \\ 2x + 8y = -14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 8y = 54 \\ 2x + 8y = -14 \end{cases}$$

8x // = 40

da cui segue x=5.

Per determinare il valore di y, sostituiamo il valore di x trovato, per esempio, nella prima equazione del sistema:

$$\begin{cases} 3(5) - 4y = 27 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15 - 4y = 27 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y = 12 \\ x = 5 \end{cases} \longrightarrow \quad y = -3$$

$$\begin{cases} y = -3 \\ x = 5 \end{cases}$$

La coppia (5, – 3) è la soluzione del sistema.

Esercizio

Risolvere il sistema : $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x + 3y = 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x + 3y = 9 \end{cases}$$

7x // = 14 $\longrightarrow$ x=2

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(2) - 3y = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 - 3y = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3y = 1 \rightarrow y = -\frac{1}{3} \\ x = 2 \end{cases}$$

La coppia $\left(2, -\frac{1}{3}\right)$ è la soluzione del sistema

Criterio dei rapporti

Dato il sistema lineare $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ (a', b', c'≠ 0)

- se: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ il sistema è **determinato**
- se: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ il sistema è **indeterminato**
- se: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ il sistema è **impossibile**

Esempi:

1) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases}$

$$\frac{a}{a'} = \frac{1}{3} \qquad \frac{b}{b'} = \frac{-2}{-6} \qquad \frac{c}{c'} = \frac{1}{3}$$

Poiché $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ il sistema è indeterminato.

D'altra parte, risolvendo si ha:

$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ 3(2y + 1) - 6y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} / \\ 6y + 3 - 6y = 3 \end{cases} \longrightarrow \quad 0y=0$$

Equazione indeterminata

2) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$

$$\frac{a}{a'} = \frac{3}{6} \qquad \frac{b}{b'} = \frac{-1}{-2} \qquad \frac{c}{c'} = \frac{5}{2}$$

Poiché $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ il sistema è impossibile.

D'altra parte, risolvendo si ha:

$$\begin{cases} -y = -3x + 5 \quad \rightarrow \quad y = 3x - 5 \\ 6(3x - 5) - 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 6x - 2(3x - 5) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 6x - 6x + 10 = 2 \end{cases} \longrightarrow \quad 0x = -8$$

Equazione impossibile.

Esercizi:

Risolvere i seguenti sistemi

1) $\begin{cases} y = x + 2 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - 7y = -11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 4y - 1 \\ x - 4(y + 3) = 24 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = 2 \\ (x - 1)^2 = (x - 1)(x + 1) + y \end{cases}$

Prova finale 2008

$$\begin{cases} y = x+2 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ 3x+2(x+2) = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ 3x+2x+4 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ 5x = 10 \end{cases} \rightarrow \quad x = 2$$

$$\begin{cases} y = 2+2 = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Risposta : $(2;4)$

Prova finale 2010

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - 7y = -11 \end{cases}$$

$$(-2)\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - 7y = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 6y = -2 \\ \underline{2x - 7y = -11} \end{cases}$$

$$// \qquad -13y = -13 \longrightarrow y = 1$$

$$\begin{cases} x + 3(1) = 1 \longrightarrow x = -3 + 1 = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \qquad S = \{(-2, 1)\}$$

oppure

$(-2, 1)$

Prova finale 2011

$$\begin{cases} x = 4y - 1 \\ x - 4(y+3) = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4y - 1 \\ x - 4y - 12 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4y - 1 \\ 4y - 1 - 4y - 12 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ 0y = 37 \end{cases}$$ eq. impossibile

il sistema è impossibile

$S = \emptyset$

Prova finale 2012

$$\begin{cases} y=2 \\ (x-1)^2=(x-1)(x+1)+y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2 \\ x^2+1-2x=x^2-1+y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2 \\ 1-2x=-1+y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2 \\ 1-2x=-1+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2 \\ -2x=0 \end{cases} \longrightarrow x=0$$

$$\begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases}$$